Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

I Le développement

Le but de ce développement est de trouver le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et d'en déduire divers résultats.

Dans toute ce développement, on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 1 : [Caldero, p.5]
L'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \longmapsto & f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ X & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AX) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans sur son dual.

Preuve :
On considère l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \longmapsto & f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ X & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AX) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Par linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel, les applications f_A et f sont linéaires. L'application f est donc bien définie et puisque $f\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*}$ on a que f est un morphisme.

De plus, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n^2, son dual est aussi de dimension finie et de dimension n^2 également. Il nous suffit donc de montrer que f est injective.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(A) = f_A = 0$.
On a donc que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AX) = 0$ et donc en particulier pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$ on a $\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = 0$. Or :

$$\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} (AE_{i,j})_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\delta_{i,\ell}\delta_{j,k} \right) = a_{j,i}$$

Ainsi, A est nulle et donc f est bien injective.

Par conséquent, l'application f est un isomorphisme et on a le résultat voulu.

■

Lemme 2 : [Francinou, p.41]
Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont exactement les matrices scalaires.

Preuve :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En particulier, on a pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$ que $AE_{i,j} = E_{i,j}A$. Or, la matrice $AE_{i,j}$ a tous ses coefficients nuls sauf sur la j-ième colonne et la matrice $E_{i,j}A$ a tous ses coefficients nuls sauf sur la i-ième ligne. Ainsi, en identifiant les coefficients, on trouve que le seul coefficient éventuellement non nul est $a_{i,i} = a_{j,j}$.

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$ et réciproquement, toute matrice scalaire commute avec n'importe quelle matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

■

Corollaire 3 : [Caldero, p.5]
Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire.
Si f est telle que pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait $f(XY) = f(YX)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait $f(X) = \lambda \,\mathrm{Tr}(X)$.

Preuve :
Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire.
Supposons que f est telle que pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait $f(XY) = f(YX)$.
D'après le théorème précédent, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait $f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$. De plus, pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\mathrm{Tr}(AXY) \underset{\text{hyp.}}{=} \mathrm{Tr}(AYX) = \mathrm{Tr}(XAY)$$

Donc $\mathrm{Tr}(AXY) - \mathrm{Tr}(XAY) = \mathrm{Tr}((AX - XA)Y) = 0$ et puisque cette égalité est vraie pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a par injectivité de f que $AX - XA = 0$. Ceci donne que A commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc A est une matrice scalaire.

Finalement, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$ et donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $f(X) = \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(\lambda X) = \lambda \,\mathrm{Tr}(X)$.

■

Corollaire 4 : [Caldero, p.5]
Si $n \geq 2$, alors tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Preuve :
On suppose que $n \geq 2$ et on considère H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Il existe alors $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
D'après le théorème précédent, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait $\varphi(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.
Il nous suffit donc de trouver $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{Tr}(AX) = 0$.
En notant $r = \mathrm{rg}(A)$, il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $A = PJ_rQ$, avec J_r la matrice $\mathrm{diag}(I_r, 0_{n-r})$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a alors la relation :

$$\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(PJ_rQX) = \mathrm{Tr}(J_rQXP)$$

Il nous suffit donc de trouver $Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{Tr}(J_rY) = 0$ et en posant $X = Q^{-1}YP^{-1}$ on aura bien que $X \in H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Par exemple, la matrice :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

convient puisque $\det(Y) = (-1)^{n-1} \neq 0$ (on reconnaît une matrice de permutation correspondant à un n-cycle) et $\mathrm{Tr}(J_rY) = 0$ (car la diagonale de J_rY est nulle).

■

II Remarques sur le développement

II.1 Pour aller plus loin...

II.1.1 Retour sur les résultats

Il est possible de donner une démonstration directe du corollaire 3. En effet, pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$ distincts, on a :

$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0$$

et :

$$f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j})$$

En notant alors λ la valeur commune des $f(E_{i,i})$, on obtient alors que les applications f et $\lambda\,\mathrm{Tr}()$ coïncident sur une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc elles sont égales.

Remarque 5 : [Francinou, p.42]
Le corollaire 3 nous donne alors une caractérisation de la trace parmi les formes linéaires (les formes linéaires permettant de caractériser l'appartenance à un hyperplan).

Il est également possible d'améliorer le résultat du corollaire 4. En effet, on peut naturellement se demander quelle est la dimension maximale d'une sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne rencontrant pas $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
C'est au moins $n(n-1)$ puisque le sous-espace formé des matrices dont la dernière colonne est nulle convient. On peut montrer que tout sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de codimension strictement plus grande que n contient au moins une matrice inversible.

II.1.2 Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Proposition 6 : [Caldero, p.5]
Si $n \geq 2$, alors tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Preuve :
On suppose que $n \geq 2$ et on considère H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Il existe alors $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
D'après le théorème précédent, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait $\varphi(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

Par la décomposition polaire, il existe $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.
De plus, par le théorème spectral, il existe une matrice diagonale D et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$. Cela implique, par propriété de la trace, que :

$$\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(OSX) = \mathrm{Tr}\left(OPDP^{-1}X\right) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}XOPD\right)$$

En posant $Y = P^{-1}XOD$, on voit que X est orthogonale si, et seulement si, Y est orthogonale (car l'ensemble des matrices orthogonales est un groupe pour le produit matriciel). Trouver une matrice orthogonale dans H revient donc à trouver une matrice orthogonale X telle que $\mathrm{Tr}(AX) = 0$, c'est-à-dire trouver Y orthogonale telle que $\mathrm{Tr}(YD) = 0$.

Il suffit de prendre la même matrice Y que dans le corollaire 4. Effectivement, toute matrice de permutation permute la base canonique, et donc transforme une base orthonormée (en l'occurrence la base canonique) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ en une base orthonormée (la base canonique permutée) : la matrice Y est donc bien orthogonale. De plus, la diagonale de YD est nulle, donc sa trace est bien nulle.

■

II.2 Recasages

Recasages : 159.

III Bibliographie

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.

— Serge Francinou, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, algèbre 2*.